פתרון מטלה 09 — מבוא לטופולוגיה, 80516

16 ביוני 2026

שאלה 1

נקבע x_0 על הספירה $\mathbb{S}^2$.

סעיף א'

נוכיח שכל מסילה רציפה $\gamma : I \to \mathbb{S}^2$ הומוטופית למסילה ש־x_0 אינה נמצא בתמונתה.

הוכחה:

$\square$

סעיף ב'

נעזר בהטלה הסטראוגרפית על מנת להוכיח ש־$\mathbb{S}^2$ פשוט קשר.

הוכחה:

$\square$

שאלה 2

יהי X מרחב טופולוגי, $A \subseteq X$ ו־$a \in A$. נסמן ב־$i : A \to X$ את העתקת ההכלה.

סעיף א'

נניח ש־$r : X \to A$ היא נסג עיוותי ונוכיח ש־$r_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$ איזומורפיזם.

הוכחה: $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי קיימת נסג עיוות עבור $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

הוכחה:

$\square$

שאלה 3

יהיו X_1, X_2 מרחבים טופולוגיים קשירים מסילתית ויהיו $x_1 \in X_1$ ו־$x_2 \in X_2$.

סעיף א'

יהיו $\gamma_1, \delta_1 : I \to X_1, \gamma_2, \delta_2 : I \to X_2$ שתי זוגות של מסילות כך ש־$\gamma_i(0) = \delta_i(0)$ ו־$\gamma_i(1) = \delta_i(1)$ עבור $i \in \{1, 2\}$.
נגדיר מסילות $\gamma, \delta : I \to X_1 \times X_2$ על־ידי

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$
$$(\delta_1(t), \delta_2(t))$$

נוכיח ש־$\gamma \sim \delta$ אם ורק אם $\gamma_1 \sim \delta_1$ וגם $\gamma_2 \sim \delta_2$.

הוכחה: $\Longleftarrow$ נניח כי $\gamma \sim \delta$.
מהגדרה, קיימת הומוטופיה של מסילות $H : I \times I \to X_1 \times X_2$ כך שמתקיים $H(t, 0) = \gamma(t),\ H(t, 1) = \delta(t)$ וכן

$$H(0, s) = \gamma(0) = \delta(0) \qquad H(1, s) = \gamma(1) = \delta(1)$$

נסתכל על $H_i : I \times I \to X_i$ ההטלות על הקורדינאטות ולכן

$$H_1(t, 0) = \pi_1(H(t, 0)) = \pi_1(\gamma(t)) = \gamma_1(t)$$
$$H_1(0, s) = \gamma_1(0) = \delta_1(0)$$
$$H_1(1, s) = \gamma_1(1) = \delta_1(1)$$

באופן דומה, $H_1(t, 1) = \delta_1(t)$ ולכן H_1 היא הומוטופיה של מסילות בין γ_1 ל־δ_1. באופן זהה נקבל על H_2 ולכן $\gamma_1 \sim \delta_1$ וכן $\gamma_2 \sim \delta_2$.
$\Longrightarrow$ נניח כי $\gamma_1 \sim \delta_1$ וגם $\gamma_2 \sim \delta_2$.
נסתכל על ההומוטופיות של מסילות $H_1 : I \times I \to X_1, H_2 : I \times I \to X_2$ כך שמתקיים

$$H_i(t, 0) = \gamma_i(t) \qquad H_i(t, 1) = \delta_i(t)$$
$$H_i(0, s) = \gamma_i(0) = \delta_i(0)$$
$$H_i(1, s) = \gamma_i(1) = \delta_i(1)$$

טבעי להגדיר $H : I \times I \to X_1 \times X_2$ על־ידי $H(t, s) = (H_1(t, s), H_2(t, s))$ והיא רציפה בכל קורדינאטה ולכן רציפה, אז

$$H(t, 0) = (H_1(t, 0), H_2(t, 0)) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \gamma(t)$$
$$H(t, 1) = \delta(t)$$
$$H(0, s) = (H_1(0, s), H_2(0, s)) = (\gamma_1(0), \gamma_2(0)) = \gamma(0) = \delta(0)$$
$$H(1, s) = \gamma(1) = \delta(1)$$

אז H הומוטופיה של מסילות בין γ ל־δ. □

סעיף ב'

נוכיח שיש איזומורפיזם של חבורות $\pi_1(X_1 \times X_2, (x_1, x_2)) \cong \pi_1(X_1, x_1) \times (X_2, x_2)$.

הוכחה: נגדיר $\Phi : \pi_1(X_1 \times X_2, (x_1, x_2)) \to \pi_1(X_1, x_1) \times (X_2, x_2)$ על־ידי $\Phi([\gamma]) = ([\gamma_1], [\gamma_2])$ כאשר $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$.
נניח ש־$[\gamma] = [\delta]$ ולכן $\gamma \sim\sim \gamma$ ומהסעיף הקודם $\gamma_1 \sim \delta_1,\ \gamma_2 \sim \delta_2$ ולכן $[\gamma_1] = [\delta_1], [\gamma_2] = [\delta_2]$ ומכאן נקבל ש־Φ מוגדרת היטב.
כזכור, כפל בחבורה היסודית הוא שרשור מסילות ולכן נחשב

$$\Phi([\gamma] \cdot [\delta]) = \Phi([\gamma * \delta])$$

אז

$$(\gamma * \delta)_1 = \gamma_1 * \delta_1, \quad (\gamma * \delta)_2 = \gamma_2 * \delta_2$$

ולכן

$$\Phi([\gamma * \delta]) = \Phi([\gamma_1 * \delta_1], [\gamma_2 * \delta_2]) = \Phi([\gamma_1][\delta_1], [\gamma_2][\delta_2]) = \Phi([\gamma])\Phi([\delta])$$

אז Φ הומומורפיזם.
החד־חד ערכיות נובעת ישירות מהסעיף הקודם גם־כן שכן אם $\Phi([\gamma]) = \Phi([\delta])$ אז $[\gamma_1] = [\delta_1], [\gamma_2] = [\delta_2]$ כלומר $\gamma_1 \sim \delta_1, \gamma_2 \sim \delta_2$ ומהסעיף הקודם $\gamma \sim \delta$ והחד־חד ערכיות נובעת.
נשאר להראות על – יהיו $([\alpha_1], [\alpha_2]) \in \pi_1(X_1, x_1) \times \pi_2(X_2, x_2)$ אז נגדיר $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$.
מאחר שמתקיים

$$\alpha_1(0) = \alpha_1(1) = x_1, \quad \alpha_2(0) = \alpha_2(1) = x_2$$

אז α היא לולאה בבסיס (x_1, x_2) ומתקיים $\Phi([\alpha]) = ([\alpha_1], [\alpha_2])$ ו־Φ על ולכן Φ איזומורפיזם של חבורות. □

שאלה 4

תהיי $(G,\cdot)$ חבורה ותהיי τ טופולוגיה שמוגדרת על G. נאמר כי G חבורה טופולוגית אם פעולות הכפל וההפכי הן רציפות כאשר

$$G \times G \to G,\ (x,y) \mapsto x \cdot y$$
$$G \to G,\ x \mapsto x^{-1}$$

תהיי G חבורה טופולוגית ונסמן ב־1 את איבר היחידה של G.
תהיי $\Omega(G,1)$ קבוצת כל הלולאות הרציפות עם בסיס ב־1. אם $f,g \in \Omega(G,1)$ נוכל להגדיר

$$(f \otimes g)(s) = f(s) \cdot g(s)$$

סעיף א'

נוכיח כי $(\Omega(G,1),\otimes)$ היא אכן חבורה.

הוכחה: ראשית עליו להראות סגירות תחת הפעולה $\otimes$ אז יהיו $f,g \in \Omega(G,1)$.
נשים לב ש־$f \otimes g$ היא הרכבה של שתי פונקציות רציפות ולכן רציפה שכן כל קורדיאנטה שלה היא רציפה ופעולת הכפל של חבורה G היא רציפה ולכן המסילה $f \otimes g$ רציפה ומתקיים מכך ש־f,g לולאות רציפות עם בסיס ב־1 (כלומר מתחילות ונגמרות ב־1)

$$(f \otimes g)(0) = f(0) \cdot g(0) = 1 \cdot 1 = 1$$
$$(f \otimes g)(1) = f(1) \cdot g(1) = 1 \cdot 1 = 1$$

ולכן $f \otimes g \in \Omega(G,1)$ ויש לנו סגירות.
בשביל האסוציאטיביות, יהיו $f,g,h \in \Omega(G,1)$. מכך ש־G חבורה מתקיים

$$((f \otimes g) \otimes h)(s) = (f(s) \cdot g(s)) \cdot h(s) = f(s) \cdot (g(s) \cdot h(s)) = (f \otimes (g \otimes h))(s)$$

נראה שיש איבר יחידה – נגדיר $e : I \to G$ על־ידי $e(s) = 1$ ופונקציה קבועה היא פונקציה רציפה ואכן $e \in \Omega(G,1)$ ולכל $f \in \Omega(G,1)$ ולכל $s \in I$ מתקיים

$$(e \otimes f)(s) = 1 \cdot f(s) = f(s)$$
$$(f \otimes 1)(s) = f(s) \cdot 1 = f(s)$$

נשאר רק להראות קיום איבר הופכי – תהיי $f \in \Omega(G,1)$ ונגדיר $f^{-1} : I \to G$ על־ידי $f^{-1}(s) = (f(s))^{-1}$ והיא אכן רציפה שכן זו הרכבה של f עם ההעתקת ההופכי של החבורה G ובעצם זו הרכבה של רציפות ולכן רציף ויתר על־כן מתקיים

$$f^{-1}(0) = (f(0))^{-1} = 1^{-1} = 1$$
$$f^{-1}(1) = (f(1))^{-1} = 1^{-1} = 1$$

ועל־כן, $f \in \Omega(G,1)$. כדי שזה יהיה הופכי עלינו לוודא שעבור כל $s \in I$ מתקיים

$$(f \otimes f^{-1})(s) = f(s) \cdot (f(s))^{-1} = 1 = e(s)$$

הראינו את כל האקסיומות של החבורה ועל־כן $(\Omega(G,1),\otimes)$ היא אכן חבורה. □

סעיף ב'

נוכל להגדיר פעולה $\otimes$ על $\pi_1(G,1)$ על־ידי $[f] \otimes [g] = [f \otimes g]$ לכל $[f],[g] \in \pi_1(G,1)$.
נוכיח כי $\otimes$ מוגדרת היטב על $\pi_1(G,1)$ וכי $(\pi_1(G,1),\otimes)$ היא חבורה.

הוכחה: יהיו $f_1,f_2,g_1,g_2 \in \Omega(G,1)$ כך ש־$f_1 \sim f_2, g_1 \sim g_2$ ולכן קיימות הומוטופיות $F : I \times I \to G$ בין f_1 ל־f_2 ו־$G : I \times I \to H$ בין g_1 ל־g_2.
נגדיר $K : I \times I \to G$ על־ידי $K(s,t) = F(s,t) \cdot H(s,t)$ ו־K רציפה כהרכבת פונקציות רציפות (G חבורה טופולוגית).
לכל t מתקיים

$$F(0,t) = F(1,t) = H(0,t) = H(1,t) = 1$$

ולכן

$$K(1,t) = K(0,t) = 1 \cdot 1 = 1$$

כלומר $K(-,t)$ היא לולאה ב־1 לכל t.
יתר על־כן

$$K(s,1) = f_2(s) \cdot g_2(s)$$
$$K(s,0) = f_1(s) \cdot g_1(s)$$

מכך ש־K הומוטופיה בין $f_1 \otimes g_1$ ל־$f_2 \otimes g_2$ מתקיים $[f_1 \otimes g_1] = [f_2 \otimes g_2]$ והפעולה מוגדרת היטב.
כעת, נשאר להראות שזו אכן חבורה.
האסוציאטיביות ברורה מהאסוציאטיביות של G, איבר היחידה כמקודם הוא $e(s) = 1$ הלולאה הקבועה ומתקיים

$$[f]\otimes[e]=[f(s)\cdot 1]=[f(s)]=[f]$$

ובאופן זהה $[e]\otimes[f]=[f]$, נשאר רק להראות הופכי אבל זה בידיוק כמקודם עם $f^{-1}(s)=(f(s))^{-1}$ זו לולאה רציפה (כי ההופכי בחבורה טופולוגית רציף) ומתקיים

$$[f]\otimes[f^{-1}]=[f(s)\cdot(f(s))^{-1}]=[1]=[e]$$

ובאופן דומה גם $[f^{-1}\otimes[f]=[e]$ ולכן $(\pi_1(G,1),\otimes)$ זו חבורה. □

סעיף ג'

נוכיח כי $[f]\otimes[g]=[f]*[g]$ לכל $[f],[g]\in\pi_1(G,1)$.

הוכחה: מתקיים $[g]=[e*g],[f]=[f*e]$ כאשר e היא הלולאה הקבועה ב־1 ולכן

$$[f]\otimes[g]=[f*e]\otimes[e*g]=[(f*e)\otimes(e*g)]$$

ומתקיים

$$((f*e)\otimes(e*g))(s)=\begin{cases}f(2s)\cdot e(2s)=f(2s)\cdot 1=f(2s) & 0\le s\le\frac{1}{2}\\ e(2s-1)\cdot g(2s-1)=1\cdot g(2s-1)=g(2s-1) & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}$$

וזו בידיוק הגדרת השרשור. □

סעיף ד'

נוכיח כי $\pi_1(G,1)$ היא חבורה אבלית.

הוכחה: ראינו שמתקיים $[g]=[g*e],[f]=[e*f]$ ומתקיים

$$[f]\otimes[g]=[e*f]\otimes[g*e]=[(e*f)\otimes(g*e)]$$

וכעת מתקיים

$$((e*f)\otimes(g*e))(s)=\begin{cases}e(2s)\cdot g(2s)=1\cdot g(2s)=g(2s) & 0\le s\le\frac{1}{2}\\ f(2s-1)\cdot e(2s-1)=f(2s-1)\cdot 1=f(2s-1) & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}$$

זו בידיוק ההגדרה לשרשור של $g*f$, ולכן

$$[f]\otimes[g]=[g*f]=[g]*[f]$$

ומהסעיף הקודם

$$[f]\otimes[g]=[f]*[g]=[g]*[f]$$

אבל זה בידיוק אומר שהחבורה אבלית. □